数理解析研究所講究録
940巻 1996年 77-82

COINCIDENCE OF TWO TOPOLOGICAL DEGREES FOR SOLUTION MAPPINGS IN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

東北学院大教養　上之郷高志 (Takashi Kaminogo)

1. 序文

常微分方程式の初期値問題

(E) $$x' = f(t, x), \qquad x(0) = u$$

を考える．ここで $f:[0,T]\times R^n \to R^n$ は連続で，$u\in R^n$ である．さらに f は次の条件を満たしていると仮定する．

(A) $\exists a>0,\ \exists b>0,\ |f(t,x)|\leqq a+b|x|$ on $[0,T]\times R^n$.

この条件により，(E) のすべての解は，区間 $[0,T]$ 全体で存在する．各 $u\in R^n$ に対して，集合 $\Gamma(u)$ を

$$\Gamma(u)=\{x(T);\ x \text{ は (E) の解}\}$$

で定めると，$\Gamma(u)$ は R^n のコンパクトな連結集合 (Kneserの定理) になり，写像 $\Gamma: R^n\to K(R^n)$ が得られる．ここで，$K(R^n)$ は R^n の空でないコンパクト集合全体からなる集合族を表す．

1981年に [1] で，R^n の有界な開集合 D と

(1) $$p\in R^n\setminus\Gamma^*(\partial D)$$

を満たす p に対して，写像度 $\deg(\Gamma, D, p)$ が定義されることを示した．ここで，集合 $\Gamma^*(u)$ は $\Gamma(u)$ の convex hull を表す．すなわち，$\Gamma^*(u)=\mathrm{co}\Gamma(u)$ である．また，1995年には [2](cf.[3]) で，半線形放物型偏微分方程式に対しても同様の結果を得，同時に [1] の結果を改良して，点 p の満たすべき条件は (1) よりゆるい

(2) $$p\in R^n\setminus\Gamma(\partial D)$$

でよいことも示した．[1],[2] いずれの場合も，方程式の右辺の関数を，従属変数についてリプシッツ連続な関数で近似して，Γ を近似する一価連続な写像の列を構成する方法をとった．2節でその方法の要約を紹介する．(E) が時間遅れをもつ関数微分方程式の場合には，上述の方法は適用できない．何故なら，f の定義域は無限

次元空間になるのでリプシッツ連続な関数で一様近似することが出来ないからである. [4] では, f の近似列を用いない別の方法で Γ の近似列を構成して, 時間遅れの入った方程式に対しても写像度が入ることを示した. 3節では [4] の方法を常微分方程式の場合について適用し紹介する. 2節と3節で得られた2つの写像度の定義が一致することを, 4節で証明する.

2. 近似方程式による写像度の定義

条件 (A) を満たす f に対して, 次の性質 (P1), (P2) を満たす連続関数列 $\{f_k\}\subset C([0,T]\times R^n, R^n)$ が存在する.

(P1) $\{f_k\}$ は f に広義一様収束し, 各 f_k は (A) を満たす.

(P2) $\forall k\in N$, $\forall M>0$, $\exists L=L(k,M)>0$,

(3) $$|f_k(t,x)-f_k(t,y)|\leqq L(k,M)|x-y|$$
$$\text{for } t\in[0,T],\ x,y\in R^n \text{ with } |x|\leqq M, |y|\leqq M.$$

各 $k\in N$ に対して, 初期値問題

$$x'=f_k(t,x),\qquad x(0)=u$$

は唯一つの解 $w_k(t;u)$ をもつ. $\lambda_k(u):=w_k(T;u)$ で λ_k を定めると連続写像 $\lambda_k:R^n\to R^n$ が得られる. この λ_k と (2) を満たす p について, k が十分大ならば, $\deg(\lambda_k, D, p)$ が定義でき, この値は k に無関係であることを示そう.

任意の $\theta\in I=[0,1]$ と $k, l\in N$ に対し, 初期値問題

$$x'=(1-\theta)f_k(t,x)+\theta f_l(t,x),\quad x(0)=u$$

は唯一つの解 $w_{k,l}(t;\theta,u)$ をもつ. $\lambda_{k,l}(\theta,u):=w_{k,l}(T;\theta,u)$ で $\lambda_{k,l}$ を定めると, 連続写像 $\lambda_{k,l}:I\times R^n\to R^n$ が得られる. 作り方より明らかに

$$\lambda_{k,l}(0,\cdot)=\lambda_k,\qquad \lambda_{k,l}(1,\cdot)=\lambda_l$$

が成り立ち, [2] の補題10と同様にして次の補題が示せる.

補題1 $\exists n_0\in N$, $k, l\geqq n_0 \Longrightarrow p\in R^n\setminus\lambda_{k,l}(I,\partial D)$.

この補題より, $k, l\geqq n_0$ ならば $\deg(\lambda_k, D, p)$ と $\deg(\lambda_l, D, p)$ は意味をもち, 両者は一致することが分かる. そこで $\deg(\Gamma, D, p)$ を

(4) $$\deg(\Gamma, D, p)=\lim_{k\to\infty}\deg(\lambda_k, D, p)$$

と定める. これは well defined である. すなわち, (4) の値は, 列 $\{f_k\}$ の取り方によらない. [2] の定理4と同様に次の定理が示せる.

定理1　$\deg(\Gamma, D, p) \neq 0 \Longrightarrow \exists u \in D,\ \Gamma(u) \ni p.$

3．折れ線近似による写像度の定義

任意の $0 < \varepsilon \leqq 1$ と $u \in R^n$ に対して，関数 $\xi(t)$ を

$$\xi(t) = \begin{cases} u & \text{for } t \in [-1, 0], \\ u + \displaystyle\int_0^t f(s, \xi(s-\varepsilon))ds & \text{for } t \in [0, T] \end{cases} \tag{5}$$

と定める．Gronwall の不等式と条件（A）より次の補題は容易に示せる．

補題2　(5) で定めた ξ は $|\xi(t)| \leqq \{(1+\varepsilon b)|u| + aT\}e^{bT}$, $t \in [0, T]$, を満たす．

(5) の ξ を $S(\varepsilon, u)$ と表すと，写像 $S:(0,1] \times R^n \to C([-1, T], R^n)$ を得る．

補題3　$S:(0,1] \times R^n \to C([-1, T], R^n)$ は連続である．

証明　$(0,1] \times R^n$ 内の点列 $\{(\varepsilon_k, u_k)\}$ が 点 $(\varepsilon, u) \in (0,1] \times R^n$ に収束しているとする．簡単のため $S(\varepsilon_k, u_k)$ と $S(\varepsilon, u)$ をそれぞれ ξ_k, ξ とかく．明らかに，区間 $[-1, 0]$ 上では $\{\xi_k\}$ は ξ に一様収束している．$\{u_k\}$ の有界性と補題2より，正の数 M が存在して，

$$|f(t, \xi_k(t-\varepsilon_k))| \leqq M, \quad |f(t, \xi(t-\varepsilon))| \leqq M \text{ for } t \in [0, T],\ k \in N$$

が成り立っている．各 $t \in [0, T]$ に対して，

$$\begin{aligned} |\xi(t) - \xi_k(t)| &\leqq |u - u_k| \\ &\quad + \int_0^t |f(s, \xi(s-\varepsilon)) - f(s, \xi_k(s-\varepsilon))|ds \\ &\quad + \int_0^T |f(s, \xi_k(s-\varepsilon)) - f(s, \xi_k(s-\varepsilon_k))|ds \\ &=: |u - u_k| + F_k(t) + a_k \end{aligned}$$

であるが，右辺第一項 $|u - u_k|$ は $k \to \infty$ のとき 0 に収束する．また，$\{\xi_k\}$ は区間 $[-1, T]$ で同等連続かつ一様有界であるから，$\{a_k\}$ も 0 に収束する．次に $F_k(t)$ が区間 $[0, T]$ で一様に 0 に収束することをみよう．$0 \leqq t \leqq \varepsilon$ に対して

$$0 \leqq F_k(t) \leqq \int_0^\varepsilon |f(s, u) - f(s, u_k)|ds$$

であるから，$F_k(t)$ は $[0, \varepsilon]$ 上で 0 に一様収束している．従って，$\{\xi_k\}$ は区

間 $[-1, \varepsilon]$ 上で ξ に一様収束している．同様に $\varepsilon \leqq t \leqq 2\varepsilon$ に対しては

$$0 \leqq F_k(t) \leqq \int_0^{2\varepsilon} |f(s, \xi(s-\varepsilon)) - f(s, \xi_k(s-\varepsilon))| ds$$

が成り立ち，一方 $\{\xi_k(t-\varepsilon)\}$ は $[0, 2\varepsilon]$ 上で $\xi(t-\varepsilon)$ に一様収束していたから，$\{F_k(t)\}$ は $[0, 2\varepsilon]$ 上で 0 に一様収束している．よって，$\{\xi_k\}$ は ξ に $[-1, 2\varepsilon]$ 上で一様収束する．この操作を繰り返して，$\{\xi_k\}$ は $[-1, T]$ で ξ に一様収束していることがわかる． q. e. d.

補題４ $(0,1] \times \boldsymbol{R}^n$ 内の点列 $\{(\varepsilon_k, u_k)\}$ が $(0, u)$, $u \in \boldsymbol{R}^n$, に収束しているとする．このとき $\{S(\varepsilon_k, u_k)\}$ の部分列で $C([-1, T], \boldsymbol{R}^n)$ の元 ξ に一様収束するものがある．また，$\xi|_{[-1, T]}$ は（E）の解になっている．

証明 補題３の証明で用いた議論を使う． q. e. d.

上の $S(\varepsilon, u)$ を用いて Γ の近似列を次のように構成する．各 $k \in \boldsymbol{N}$ に対して，$S(k^{-1}, u) = \xi_k$ と置き，$\xi_k(T) =: \gamma_k(u)$ で γ_k を定める．すなわち，

$$\gamma_k(u) := \xi_k(T) = S(k^{-1}, u)(T).$$

補題４より $\gamma_k : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ は連続である．この γ_k と (2) を満たす p に対して，k が十分大ならば，$\deg(\gamma_k, D, p)$ が定義できて，この値は k に無関係であることをみよう．$(\theta, u) \in I \times \boldsymbol{R}^n$ に対し，

$$\gamma_{k,l}(\theta, u) := S((1-\theta)k^{-1} + \theta l^{-1}, u)(T)$$

と定めると，再び補題４より，$\gamma_{k,l} : I \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ は連続であることがわかる．また，明らかに，$\gamma_{k,l}(0, \cdot) = \gamma_k$, $\gamma_{k,l}(1, \cdot) = \gamma_l$ が成り立っている．次の補題は補題４と［2］の補題10の証明で用いた議論により，容易に示せる．

補題５ $\exists n_1 \in \boldsymbol{N}$, $k, l \geqq n_1 \Longrightarrow p \in \boldsymbol{R}^n \setminus \gamma_{k,l}(I, \partial D)$.

この補題により $k, l \geqq n_1$ ならば $\deg(\gamma_k, D, p)$ と $\deg(\gamma_l, D, p)$ はそれぞれ意味をもち，両者は一致することがわかる．よって，$\deg(\Gamma, D, p)$ を次で定義することができる．

(6) $$\deg(\Gamma, D, p) = \lim_{k \to \infty} \deg(\gamma_k, D, p).$$

４．２つの写像度の同値性

(4) で定めた写像度 $\deg(\Gamma, D, p)$ を $d(\Gamma, D, p)$ で表し，(6) で定めた写像度 $\deg(\Gamma, D, p)$ を $\rho(\Gamma, D, p)$ で表す．このとき，次の定理が成り立つ．

定理2　$d(\Gamma, D, p)=\rho(\Gamma, D, p)$.

証明　任意の $k, l\in \boldsymbol{N}$ と $\theta\in I$ に対して，初期値問題

$$\begin{cases} y(t)=u, & t\in[-1,0], \\ y'(t)=\theta f(t, y(t-l^{-1}))+(1-\theta)f_k(t, y(t)), & t\in[0,T] \end{cases}$$

または，これと同値な

$$(7)\quad y(t)=\begin{cases} u, & t\in[-1,0], \\ u+\displaystyle\int_0^t\{\theta f(s, y(s-l^{-1}))+(1-\theta)f_k(s, y(s))\}ds, & t\in[0,T] \end{cases}$$

は唯一つの解 $y_{k,l}(t;\theta, u)$ をもつ．

まず $(k, l, t)\in\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\times[0,T]$ を固定したとき，$y_{k,l}(t;\theta, u)$ は $(\theta, u)\in I\times\boldsymbol{R}^n$ に関して連続であることを示そう．いま $\{(\theta_m, u_m)\}$ を $I\times\boldsymbol{R}^n$ 内の列で，(θ, u) に収束するものとする．記述を簡単にするため，$y_{k,l}(t;\theta_m, u_m)$ を $y_m(t)$, $y_{k,l}(t;\theta, u)$ を $y(t)$ とかくことにする．$m\to\infty$ のとき $y_m(t)\to y(t)$ を示せばよい．$\{u_m\}$ は有界列であることと，(A),(P1) より，正の数 M_1 が存在して，

$$|y_m(t)|\leqq M_1,\quad |y(t)|\leqq M_1\quad \text{for}\quad t\in[-1,T],\ m\in\boldsymbol{N}$$

が成り立っている．従って (7) より

$$\begin{aligned} |y_m(t)-y(t)|\leqq{}& |u_m-u| \\ &+\int_0^T|\theta_m f(s, y_m(s-l^{-1}))-\theta f(s, y_m(s-l^{-1}))|ds \\ &+\int_0^t|\theta f(s, y_m(s-l^{-1}))-\theta f(s, y(s-l^{-1}))|ds \\ &+\int_0^T|(1-\theta_m)f_k(s, y_m(s))-(1-\theta)f_k(s, y_m(s))|ds \\ &+\int_0^t|(1-\theta)f_k(s, y_m(s))-(1-\theta)f_k(s, y(s))|ds \\ \leqq{}& |u_m-u|+2|\theta_m-\theta|MT \\ &+\int_0^t|f(s, y_m(s-l^{-1}))-f(s, y(s-l^{-1}))|ds \\ &+\int_0^t L(k, M_1)|y_m(s)-y(s)|ds, \end{aligned}$$

ただし，$M=a+bM_1$ である．右辺の第３項は t ついて非減少関数であるから，Gronwall の不等式より

$$(8)\qquad |y_m(t)-y(t)| \leqq \left\{ |u_m-u|+2|\theta_m-\theta|MT + \int_0^t |f(s,y_m(s-l^{-1}))-f(s,y(s-l^{-1}))|ds \right\} \exp\{L(k,M_1)T\}$$

が導かれる．$s\in[0,\ l^{-1}]$ ならば $y_m(s-l^{-1})=u_m\to u=y(s-l^{-1})$ であるから，(8) より $y_m(t)-y(t)$ は $[0,\ l^{-1}]$ で 0 に一様収束していることがわかる．さらにこのことと (8) より，$y_m(t)-y(t)$ は 区間 $[0, 2l^{-1}]$ で 0 に一様収束していることがわかる．この操作を繰り返すことにより，$\{y_m(t)\}$ は区間 $[0, T]$ 全体で $y(t)$ に一様収束することが示せる．よって，任意の $t\in[0, T]$ について，$y_m(t)\to y(t)$ (as $m\to\infty$) が示せた．

次に $y_{k,l}(T;\theta,u)$ を $\mu_{k,l}(\theta,u)$ と表すと，上でみたことより，連続写像 $\mu_{k,l}:I\times R^n\to R^n$ が得られる．また作り方より明らかに，

$$\mu_{k,l}(0,u)=y_{k,l}(T;0,u)=w_k(T;u)=\lambda_k(u),$$

$$\mu_{k,l}(1,u)=y_{k,l}(T;1,u)=S(l^{-1},u)(T)=\gamma_l(u)$$

である．補題1，補題5と同様に次の事実も容易に示せる．

$$\exists n_2\in N,\quad k,l\geqq n_2 \Longrightarrow p\in R^n\setminus\mu_{k,l}(I,\partial D).$$

したがって，$\deg(\mu_{k,l}(\theta,\cdot),D,p)$ は $k,l\geqq n_2$，$\theta\in I$ であれば意味をもち，$\deg(\lambda_k,D,p)=\deg(\gamma_l,D,p)$ が成り立つ．これと (4),(6) より定理の結論が従う．

q. e. d.

参考文献

[1] Kaminogo, T., Boundary value problems for systems of second order ordinary differential equations, Funkcial. Ekvac. 24(1981), 187-199.

[2] 上之郷高志，菊池紀夫，半線形放物型偏微分方程式におけるKneserの定理と解写像の写像度，京都大学数理解析研究所講究録900(1995)，119-129.

[3] Kaminogo, T. and Kikuchi, N., Kneser's property and Mapping degree to multi-valued Poincaré map described by a semilinear parabolic partial differential equation, in preparation.

[4] Kaminogo, T., Topological degrees of solution mappings in functional and ordinary differential equations, in preparation.